REMARQUES SUR LES ME'MOIRES PRE'CEDENS DE *M. BERNOULLI*,

PAR M. EULER.

I.

Il n'y a aucun doute, que M. *Bernoulli* n'ait infiniment mieux développé la partie physique, qui renferme la formation du son dans le mouvement des cordes, qu'aucun autre n'a fait avant lui. On s'étoit presque uniquement arrêté à la détermination méchanique du mouvement, dont une corde tenduë peut être ébranlée, sans rechercher assez soigneusement la nature des sons, qui en sont produits. Malgré l'infinité de manieres differentes dont on a trouvé qu'une corde peut être mise en vibrations, on ne voyoit pas comme il seroit possible, qu'une même corde puisse rendre à la fois plusieurs sons differens; & c'est à M. *Bernoulli*, que nous sommes redevables de cette heureuse explication, qui est sans doute de la derniere importance dans la Physique. Il est aussi évident, que cette belle idée s'étend à toutes les autres especes des corps sonores, & que le même corps peut rendre à la fois tous les sons differens, dont il est susceptible séparément; & c'est le sujet que M. *Bernoulli* a traité avec le même succès dans son second Mémoire.

II. M. *Bernoulli* tire toutes ces excellentes réfléxions uniquement des recherches, que feu M. *Taylor* a faites sur le mouvement des cordes, & soutient contre M. d'*Alembert* & moi, que la solution de *Taylor* est suffisante à expliquer tous les mouvemens, dont une corde est susceptible; de sorte que les courbes, qu'une corde prend pendant son mouve-

mouvement, ſoit toujours, ou une trochoïde allongée ſimple, ou un mêlange de deux ou pluſieurs courbes de la même eſpece. Or quoiqu'un tel mêlange ne pût plus être regardé comme une trochoïde, & que la ſeule poſſibilité de la combinaiſon de pluſieurs courbes de M. *Taylor* rende déjà ſa ſolution inſuffiſante ; il me ſemble qu'elle eſt encore inſuffiſante à d'autres égards, & que le mouvement d'une corde pourroit être tel, qu'il ſeroit impoſſible de le rapporter à l'eſpece des trochoïdes Tayloriennes.

III. Si toutes les courbes, auxquelles la corde s'applique pendant ſon mouvement, étoient compriſes dans cette équation,

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2 \pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3 \pi x}{a} + \delta \sin \frac{4 \pi x}{a} + \&c.$$

le ſentiment de M. *Bernoulli* ſeroit juſte ; vu que prenant chaque terme ſéparément, une telle équation $y = \mu \sin \frac{m \pi x}{a}$ donne toujours une des trochoïdes aſſignées par *Taylor* ; & notre équation ſeroit formée de pluſieurs trochoïdes. Mais, dés que le nombre des termes dans cette équation devient infini, il me paroit encore douteux, ſi l'on peut dire, que la courbe ſoit compoſée d'une infinité de trochoïdes : le nombre infini ſemble détruire la nature d'une telle compoſition. Cependant j'avouë, que M. *Bernoulli* auroit pu parvenir à la découverte de toutes ces courbes par le ſeul raiſonnement fondé ſur la compoſition des trochoïdes Tayloriennes, & que l'équation rapportée, quand même elle ſeroit continuée à l'infini, en eſt une ſuite fort naturelle.

IV. Mais il y a des cas, où cette équation s'étendant à l'infini eſt réductible à une équation finie, & alors ſurtout ce ſeroit parler fort improprement, ſi l'on diſoit, que la courbe étoit compoſée d'une infinité de trochoïdes ; l'équation même en fourniſſant une idée & conſtruction beaucoup plus ſimple. Ainſi, lorſque les coëfficiens α, β,

γ, δ &c. forment une progreſſion géometrique, l'équation infinie ſe réduit à cette équation finie :

$$y = \frac{c \sin \frac{\pi x}{a}}{1 - n \cos \frac{\pi x}{a}}$$

qui renferme ſans contredit des courbes, qui peuvent convenir au mouvement d'une corde, même de l'aveu de M. *Bernoulli*, pourvu que n marque un nombre plus petit que l'unité. Cette corde devroit donc bien rendre à la fois une infinité de ſons, dont les plus hauts deviendroient de plus en plus foibles ; mais l'équation nous offre une idée beaucoup plus ſimple de cette courbe, que ſi nous voulions dire, qu'elle étoit compoſée d'une infinité de trochoïdes Tayloriennes.

V. Mais il y a plus : je n'avois donné cette équation,

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

que comme une ſolution particuliere de la formule, qui contient en général toutes les courbes, qui peuvent convenir à une corde miſe en mouvement : & il y a une infinité d'autres courbes, qui ne ſauroient être compriſes dans cette équation. Si M. *Bernoulli* tomboit d'accord là deſſus, il n'auroit pas avancé, que toutes les courbes d'une corde frappée réſultoient uniquement de la combinaiſon de deux ou pluſieurs courbes Tayloriennes ; & il auroit reconnu, que le raiſonnement fondé ſur cette combinaiſon n'eſt pas ſuffiſant à fournir une ſolution complette de la queſtion, dont il s'agit. Il n'auroit pas non plus regardé la méthode, dont M. d'*Alembert* & moi nous ſommes ſervis, comme trop embarraſſée pour arriver à une ſolution générale, qui ſe pourroit tirer d'une ſimple conſidération phyſique. La queſtion principale, que j'ai à développer, eſt donc : ſi toutes les courbes d'une corde miſe en mouvement ſont compriſes dans l'équation rapportée, ou non ?

VI. M *Bernoulli* ne conteſte pas directement la négative, que j'avois avancée: il ſe contente de dire, qu'il n'eſt pas encore aſſés éclairci là deſſus; cependant c'eſt uniquement ſur ce point qu'eſt fondée la préférence, qu'il tache de donner à ſa méthode ſur celle, dont M. d'*Alembert*, & moi, nous ſommes ſervis. Car ſi la conſidération de M. *Bernoulli* fourniſſoit toutes les courbes, qui peuvent avoir lieu dans le mouvement des cordes, il eſt certain qu'elle ſeroit infiniment préférable à notre méthode, qu'on ne pourroit plus regarder que comme un détour extrèmement épineux pour parvenir à une ſolution ſi aiſée à trouver. Mais au contraire, ſi la conſidération de M. *Bernoulli* ne découvre pas toutes les courbes, qui peuvent convenir à une corde miſe en mouvement, & qu'il y ait des cas, où la figure de la corde eſt abſolument irréductible aux trochoïdes de M. *Taylor*; il eſt auſſi inconteſtable, que la méthode de M. *Bernoulli*, quelque belle qu'elle ſoit en elle-même, ne ſoit de beaucoup inferieure à la méthode directe, qui fournit toutes les ſolutions poſſibles.

VII. Or il me ſemble que cette circonſtance ne ſauroit être révoquée en doute, dès qu'on conſidère, qu'on peut donner d'abord à la corde une figure quelconque. Car concevons, qu'on ait donné à la corde avant que de la relâcher, une figure, qui n'eſt pas compriſe dans l'équation $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2 \pi x}{a} +$ &c. & il n'y a aucun doute que la corde, après avoir été relâchée ſubitement, ne ſoit déterminée à un certain mouvement. Il eſt auſſi certain que la figure qu'elle aura après le premier inſtant ſera encore bien différente de cette équation; & quand même on voudroit ſoutenir, qu'après pluſieurs inſtans elle s'aſſujettiſſe enfin à une figure compriſe dans la dite équation, on ne ſauroit disconvenir, qu'avant que cela arrive, le mouvement de la corde ne ſoit bien different de celui, que la conſidération de M. *Bernoulli* renferme. Ce premier mouvement n'étant donc pas certainement conforme aux loix tirées de la théorie de *Taylor*, me ſemble

ble tout à fait suffisant à faire voir, que cette théorie n'est pas capable de nous éclairer sur tous les mouvemens, dont une corde est susceptible.

VIII. On sera donc obligé d'avouër, que le mouvement de la corde, du moins pendant quelque tems depuis le commencement, dépend de la figure, qu'on aura donnée d'abord à la corde; laquelle étant absolument arbitraire, il est impossible de soutenir, que ce mouvement soit toujours d'accord avec lesdites loix. Il semble encore fort incertain, si un tel mouvement se réduise enfin parfaitement à la trochoïde de *Taylor*; & quand même cela arriveroit, comme M. *Bernoulli* a remarqué très ingénieusement qu'il arrive dans le mêlange de deux ou plusieurs trochoïdes, la cause ne sauroit être attribuée, qu'au rallentissement du mouvement, causé par des circonstances externes, auxquelles on ne fait point réfléxion dans le calcul. Ainsi cela ne doit pas même entrer dans la solution, où l'on fait abstraction de toutes causes, qui peuvent rallentir & altérer le mouvement. De là il s'ensuit, qu'une solution ne sauroit être jugée complette, à moins qu'elle n'embrasse tous les cas du mouvement, pour toutes les figures possibles, qu'on pourroit donner à la corde au commencement.

IX. Mais peut-être repliquera-t-on, que l'équation $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \&c.$ à cause de l'infinité de coëfficiens indéterminés, est si générale, qu'elle renferme toutes les courbes possibles: & il faut avouër, que si cela étoit vray, la méthode de M. *Bernoulli* fourniroit une solution complette. Mais, outre que ce grand Géometre n'a pas fait cette objection, toutes les courbes comprises dans cette équation, quoiqu'on augmente le nombre des termes à l'infini, ont de certains caractères, qui les distinguent de toutes autres courbes. Car si l'on prend l'abscisse x négative, l'appliquée devient aussi négative, & égale à celle qui repond à l'abscisse positive x; de même l'appliquée qui répond à l'abscisse $a + x$, est négative, & égale à celle qui convient

vient à l'abſciſſe x. Donc ſi la courbe, qu'on aura donnée à la corde au commencement, n'a point ces propriétés, il eſt certain qu'elle n'eſt pas renfermée dans ladite équation. Or aucune courbe algébrique ne ſauroit avoir ces propriétés, qu'il faut donc toutes exclure de cette équation; & il n'y a aucun doute, qu'il n'en faille auſſi exclure une infinité de courbes tranſcendentes.

X. Mais, puisque la premiere courbe qu'on donne à la corde, eſt abſolument arbitraire, il peut arriver, & il arrivera même le plus ſouvent, que cette premiere courbure n'eſt expreſſible par aucune équation, ſoit algébrique, ſoit tranſcendente, & qu'elle n'eſt renfermée dans aucune loi de continuité. Une telle courbe ne ſera donc pas à plus forte raiſon compriſe dans l'équation alleguée. Suppoſons donc que la corde ait eu au commencement une telle figure quelconque, ſuppoſition d'autant moins impoſſible, que c'eſt plutôt la ſeule, qui puiſſe avoir lieu dans la pratique; & je demande quel ſera ſon mouvement, après qu'elle aura été relâchée? Il eſt bien certain que ce mouvement étant réel doit être déterminable, & il eſt auſſi certain, qu'il ne ſauroit être renfermé du moins pour les premiers inſtans, dans celui que M. *Bernoulli* a tiré des trochoïdes Tayloriennes: & partant cette ſolution, toute belle qu'elle eſt d'ailleurs, ne ſauroit avoir lieu que dans les cas, où par quelque hazard la corde a reçu au commencement une des figures compriſes dans l'équation mentionnée; tous les autres cas ſeront exclus de cette ſolution.

XI. Voilà donc l'étenduë, qu'il faut donner à mon avis au problème ſur les mouvemens des cordes: *Ayant donné au commencement à la corde une figure quelconque, ſoit algébrique, ſoit tranſcendente, ſoit même mécanique, il s'agit de déterminer le mouvement, que la corde pourſuivra après avoir été relâchée.* Sur ce pied il eſt bien clair, que la ſolution tirée de la combinaiſon des trochoïdes ne ſauroit être regardée, que comme très particuliere. Or, me demandera-t-on, une ſolution générale eſt-elle bien poſſible? Je crois que la ſolution, que j'en ai don-

donnée, n'eſt limitée à aucun égard, du moins je n'y puis decouvrir aucune faute, & perſonne n'en a encore montré l'inſuffiſance. Il eſt bien vrai que M. d'*Alembert*, quoiqu'il m'ait reproché que ma ſolution n'étoit pas differente de la ſienne, a avancé, mais ſans alléguer la moindre preuve, que ma ſolution ne s'étend pas à toutes les figures poſſibles, que la corde aura pu avoir au commencement; & il eſt dans le même ſentiment, que M. *Bernoulli* ſemble ſoutenir, que le mouvement d'une corde ne ſauroit être déterminé, à moins que ſa figure initiale ne ſoit comprise dans l'équation, que j'ai déjà pluſieurs fois rapportée.

XII. Je ſouhaiterois fort, que M. d'*Alembert* m'eut indiqué en quoi je me ſuis trompé, quand je donnai ma ſolution pour générale, & applicable à toutes les courbes initiales, qu'on puiſſe donner à la corde. Mais, quoiqu'il en ſoit, cela ne fait rien à la recherche préſente, attendu qu'il eſt certain, qu'il y a une infinité de cas, où le mouvement d'une corde ne ſauroit être déterminé par le mêlange de pluſieurs trochoïdes. Pour le reſte je ne m'attends pas, que M. d'*Alembert* diſe, que dans ces cas le mouvement de la corde ne ſuive aucune loi; il ſera donc déterminable par ſa nature, & ſi ma ſolution eſt fauſſe, perſonne ne ſera plus capable de ſuppléer à ce défaut, que M. d'*Alembert* lui-même. Mais je doute fort, qu'il trouve jamais une ſolution differente de la mienne, du moins s'il veut s'arrêter aux mêmes hypotheſes, qu'il a faites dans ſa ſolution, & qui l'ont conduit à l'équation:

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2 \pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3 \pi x}{a} + \&c..$$

XIII. Cependant, pour m'aſſurer mieux de ma ſolution, je m'en vais traiter de nouveau ce même problème par une méthode un peu differente, & examiner plus ſoigneuſement tous les raiſonnemens, qui m'ont conduit à la détermination générale du mouvement des cordes, quelle qu'ait été leur figure initiale. Or d'abord il faut remarquer qu'on fonde le calcul ſur quelques hypotheſes, qui ſont fort ſouvent peu conformes à la verité. On ſuppoſe premièrement la corde

parfai-

parfaitement fléxible, & destituée de toute roideur; on ne tient pas non plus compte du ressort de la corde, quoique ces circonstances puissent très considérablement altérer le mouvement; & partant on ne peut pas alléguer les effets qui en sont causés, contre la bonté de la solution. Ensuite on suppose les vibrations de la corde infiniment petites, de sorte que la corde ne change pas de longueur pendant son mouvement, & que chaque point de la corde demeure toujours dans la même ligne droite perpendiculaire à l'axe: or il est évident que la petite augmentation de la longueur de la corde dans ses excursions, peut aussi contribuër quelque chose à l'altération du mouvement.

XIV. Il s'agit donc seulement d'une solution, qui soit conforme à ces hypotheses, & point du tout d'une telle, qui satisfasse parfaitement aux phénomenes, que l'expérience nous offre. Mrs. *Bernoulli* & d'*Alembert* ont fait ces mêmes hypotheses; & ils n'attendront donc rien de la mienne, qui approche davantage de la vérité. On n'a fait ces hypotheses que pour la facilité du calcul; car on pourroit bien tenir compte dans la solution, tant de la roideur de la corde, que de son allongement dans ses excursions, & donner aux vibrations une grandeur finie; mais on parviendroit à des formules si compliquées, qu'on n'en sauroit déduire aucune conclusion satisfaisante. Ce ne sont pas les principes mécaniques, qui nous abandonnent dans ces recherches; c'est plutôt l'analyse, qui n'est pas encore portée à ce degré de perfection, qu'il faudroit pour ces sortes de questions. Les bornes de l'analyse nous obligent à de telles hypotheses, pour faciliter en sorte la solution, qu'elle ne s'écarte pas trop sensiblement de la vérité.

XV. Considérons donc une corde fixée par ses deux bouts aux points A & B, & posons la distance, ou la longueur de la corde $AB = a$; soit l'épaisseur de la corde partout la même, & la masse ou le poids de toute la corde $= M$: soit de plus la tension de la corde, ou la force dont elle est tenduë $= F$, exprimée par un poids: donc si nous prenons Fig. 1.

 une

une partie quelconque $AP = x$, sa masse sera $= \frac{Mx}{a}$, & la masse de l'élément $Pp = \frac{M\,dx}{a}$. Supposons maintenant, que la corde ait été détournée au commencement à une figure quelconque, & qu'après un tems ecoulé $= t$, elle soit parvenuë à la figure AMB. Posant donc pour cette figure l'abscisse $AP = x$, & l'appliquée $PM = y$, celle-cy sera exprimée par une certaine fonction de l'abscisse x, & du tems t, que nous indiquerons par $y = \Phi : (x, t)$. Cette équation doit être telle, que si l'on pose $t = o$, elle exprime la courbe qu'on avoit donnée à la corde au commencement; ensuite si l'on donne à t une valeur déterminée, qui convient au tems écoulé, cette même équation exprimera la nature de la courbe, que la corde aura à cet instant.

XVI. Tout revient donc à trouver de quelle nature doit être la fonction de x & t, qui exprime la valeur de l'appliquée y. Pour cet effet il faut recourir aux principes mécaniques, par lesquels le mouvement de la corde est déterminé: mais, avant que de procéder à cette recherche, l'état de la corde nous découvre quelques propriétés, qui doivent necessairement convenir à notre fonction $y = \Phi : (x, t)$. Car, puisque la corde est fixée au point A, il est évident que posant $x = 0$, cette fonction doit evanouïr, quelque valeur qu'on donne au tems t. Ensuite, puisque la corde est aussi fixée en B, si l'on pose $x = a$, la fonction doit aussi se réduire à zéro, quelque valeur que puisse avoir le tems t. Nous connoissons donc déjà, indépendamment des principes mécaniques, trois propriétés de notre fonction $y = \Phi : (x, t)$, dont la premiere est que posant $t = 0$, elle exprime la courbe initiale de la corde, & les deux autres, que quelque valeur que le tems t puisse avoir, l'appliquée y evanouïsse toujours; tant pour $x = 0$, que pour $x = a$.

XVII. Puisque la corde, après le tems t, est réduite à la figure AMB, voyons par quelle force chacun de ses élémens est sollicité; & il

il eſt clair que dans cette recherche le tems t doit être regardé comme invariable. Or, en vertu de l'hypotheſe que les excurſions de la corde ſont infiniment petites, la tenſion de la corde dans l'état AMB, ſera la même dans tous les points de la corde, & partant $=$ F. Donc, par la tenſion de l'élément précedent $M\mu$, le point M ſera ſollicité vers la direction MP par la force $F\left(\frac{dy}{dx}\right)$, où $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ marque la valeur de la fraction $\frac{dy}{dx}$ en poſant le tems t conſtant. Or par la tenſion de l'élément ſuivant Mm, prenant $Pp = Mm = dx$, le point M ſera ſollicité en ſens contraire par la force $F\left(\left(\frac{dy}{dx}\right) + d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$: & partant combinant ces deux forces enſemble, le point M ſera ſollicité ſelon la direction MP par la force $-Fd\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Puiſque dans ce différentiel le tems t eſt encore pris pour conſtant, cette force ſera $= -Fdx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, où la formule $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ exprime la valeur de $\frac{ddy}{dx^2}$ en ſuppoſant le tems t conſtant.

XVIII. Concevons que toute la maſſe de l'élément Mm, qui eſt $= \frac{Mdx}{a}$ ſoit réünie au point M, & elle ſera ſollicitée dans la direction MP par la force $= -Fdx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$; c'eſt donc de cette force que le mouvement de l'élément Mm ſera altéré, & puiſque ce mouvement ſe fait ſuivant la même direction MP, ſi nous voulons déterminer ce mouvement, nous devons regarder l'abſciſſe $AP = x$ comme conſtante, & nous tenir uniquement à la variabilité du tems t. Or les principes méchaniques nous donnent l'accélération de ce mou-

 vement

vement selon la direction MP $= -2\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, laquelle doit être égale à la force accélératrice, ou à la force motrice $-Fdx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ divisée par la masse $\frac{Mdx}{a}$, d'où nous tirons cette équation :

$$-2\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{Fa}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

Pour l'intelligence de cette équation il suffit de remarquer, que dans la formule $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ le seul tems t est regardé comme variable, & dans la formule $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ la seule abscisse x.

XIX. A' cette occasion il sera à propos d'expliquer davantage cette maniere d'indiquer les différentiels des fonctions de plusieurs variables, en n'en faisant varier qu'une seulement; puisque cette considération est d'une très grande utilité dans quantité de problèmes méchaniques & hydrodynamiques. Soit donc y une fonction quelconque des variables x, t, u, &c. & en les faisant varier toutes, le différentiel de y aura une telle forme $dy = Pdx + Qdt + Rdu$, où le membre Pdx marque le différentiel de y, en faisant varier la seule quantité x, & regardant les autres t, & u comme constantes. De même le membre Qdt marque le différentiel de y en faisant varier la seule quantité t, & le membre Rdu celui en faisant varier la seule quantité u. Cette considération nous donne donc à connoitre les quantités finies P, Q, & R: or, pour ne pas avoir besoin de tant de lettres, je les indique de la maniere suivante :

$$P = \left(\frac{dy}{dx}\right); \quad Q = \left(\frac{dy}{dt}\right); \quad R = \left(\frac{dy}{du}\right).$$

XX. Connoiſſant donc la ſignification de ces expreſſions & d'autres ſemblables, on les peut étendre à des différentiels de plus hauts degrés. Ainſi, puisque $P = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, & que P eſt encore une fonction finie des quantités x, t, u, on aura une idée juſte de l'expreſſion $\left(\frac{dP}{dx}\right)$, au lieu de laquelle je mets $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, de ſorte que poſant $\left(\frac{dy}{dx}\right) = P$, cette expreſſion $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ renferme la valeur de $\left(\frac{dP}{dx}\right)$. De même ayant $\left(\frac{dy}{dt}\right) = Q$, l'expreſſion $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ſera la valeur de $\left(\frac{dQ}{dt}\right)$; & pareillement $\left(\frac{ddy}{du^2}\right) = \left(\frac{dR}{du}\right)$. On peut auſſi changer dans les différentiations ſuccesſives les variables, & ainſi la valeur de $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ ſera exprimée par $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$, & celle de $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{ddy}{dt\,dx}\right)$. En conſéquence de cela il y aura auſſi:

$$\left(\frac{ddy}{dx\,du}\right) = \left(\frac{dP}{du}\right); \quad \left(\frac{ddy}{du\,dx}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{ddy}{dt\,du}\right) = \left(\frac{dQ}{du}\right); \quad \left(\frac{ddy}{du\,dt}\right) = \left(\frac{dR}{dt}\right).$$

XXI. Or on ſait que dans un tel différentiel complet $dy = Pdx + Qdt + Rdu$, les quantités finies P, Q, R, ſont dans une telle rélation entr'elles, que ſelon la même maniere d'exprimer il y a:

$$\left(\frac{dP}{dt}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \quad \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \quad \left(\frac{dQ}{du}\right) = \left(\frac{dR}{dt}\right)$$

De

De là nous aurons :

$\left(\frac{ddy}{dxdt}\right) = \left(\frac{ddy}{dtdx}\right)$; $\left(\frac{ddx}{dxdu}\right) = \left(\frac{ddy}{dudx}\right)$; $\left(\frac{ddy}{dtdu}\right) = \left(\frac{ddy}{dudt}\right)$

où il eſt fort remarquable, que ſi le dénominateur contient deux différens différentiels, il eſt indifférent en quel ordre ils ſoient écrits. De là on comprendra aiſément la ſignification de ſemblables formules, lorsqu'elles renferment des différentiels plus hauts : ainſi pour connoitre la valeur de $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, qu'on poſe $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = V$, & on aura $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right)$. Pareillement ayant $\left(\frac{d^3y}{dx^2dt}\right)$, ſi l'on met ou $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = V$ ou $\left(\frac{ddy}{dxdt}\right) = U$, la valeur de $\left(\frac{d^3y}{dx^2dt}\right)$ ſera ou $= \left(\frac{dV}{dt}\right)$ ou $= \left(\frac{dU}{dx}\right)$, & cela nous éclaircit ſuffiſamment ſur la ſignification de ſemblables formules, qui renferment encore de plus hauts différentiels.

XXII. Voilà donc à quoi le problème ſur le mouvement de la corde eſt réduit : il s'agit de trouver pour y une telle fonction des deux variables x & t, qui ſatisfaſſe à cette équation : $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, outre qu'elle renferme les propriétés marquées cy-deſſus. Mais, avant que de faire attention à ces propriétés, cherchons en général toutes les fonctions poſſibles de x & t, qui étant miſes pour y, rendent $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. C'eſt le problème, dont M. d'*Alembert* a donné le premier une ſolution générale ; & il ſeroit à ſouhaiter qu'on découvrit une méthode propre à

réſoudre

résoudre d'autres formules semblables. Une telle méthode serviroit à résoudre quantité de problèmes, qu'on a été obligé d'abandonner jusqu'ici.

XXIII. Avant que d'entreprendre la résolution de cette équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, je remarque qu'elle a une étenduë infinie. Car si P, Q, R, sont de telles fonctions de x & t, qui satisfont à cette équation, étant posées pour y, de sorte qu'il y ait tant $y = P$, que $y = Q$, & $y = R$, il est clair que cette valeur

$$y = \alpha P + \beta Q + \gamma R,$$

satisfera également à ladite équation. La raison en est, puisque y n'a qu'une seule dimension dans notre équation. Cette remarque nous conduit dabord à la solution de M. *Bernoulli*, prise dans un sens plus général; car si les équations $y = P$, $y = Q$, & $y = R$, renferment chacune une espece particuliere de vibration de la corde, la même corde sera aussi susceptible d'un mouvement représenté par cette équation $y = \alpha P + \beta Q + \gamma R$; & cette même composition a aussi lieu dans tous les autres genres de vibrations, pourvu qu'elles soient infiniment petites, puisque l'équation, qui exprime le mouvement, ne contient dans tous ses termes qu'une seule dimension de l'appliquée y. C'est donc ici, qu'il faut chercher le vray fondement de la solution de M. *Bernoulli.*

XXIV. Pour la mesure du tems, que j'ai marqué ici par t, je ne m'arrête pas directement à déterminer la longueur du pendule isochrone. Mon but principal est d'assigner pour chaque moment la figure & l'état, où la corde se trouve alors : c'est de là qu'on connoitra le vray mouvement de chaque point de la corde, & il sera ensuite aisé de le comparer avec le mouvement d'un pendule. Il est aussi nécessaire de traiter sur ce pied-là le mouvement des cordes, puisqu'on n'est pas assuré, si tous les élémens de la corde achevent leurs vibrations en même tems. Mais, pour avoir une mesure absoluë du tems, on n'a

 qu'à

qu'à introduire la hauteur g par laquelle un corps grave tombe dans une ſeconde, & à écrire $2\,t\sqrt{g}$ au lieu de t, & alors la quantité t nous donnera le tems exprimé en minutes ſecondes. Poſons donc $2\,t\sqrt{g}$ pour t, & partant $4g\,dt^2$ pour dt^2, & notre équation, qui renferme le mouvement de la corde ſera $\frac{1}{4g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ ou bien : $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Ainſi ce n'eſt pas ſur le pendule iſochrone, que je fonde la connoiſſance du mouvement des cordes comme M. *Bernoulli* me le reproche tant de fois.

XXV. Ayant réduit la conſidération du tems à une notion préciſe, poſons pour abréger $\frac{2Fag}{M} = cc$, & il s'agit de réſoudre l'équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, ou de chercher pour y toutes les fonctions de t & x, qui ſatisfaſſent à cette équation. Puiſque le rapport des différentio-différentiels de y eſt donné par cette équation ; je commencerai par chercher celui des premiers différentiels, ou plutôt des quantités $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Or comme celui-là eſt conſtant, il eſt aiſé de voir que celui-cy le ſera auſſi. Suppoſons donc $\left(\frac{dy}{dt}\right) = k\left(\frac{dy}{dx}\right)$; & prenant de part & d'autre les différentiels en ſuppoſant la ſeule x variable, nous aurons $\left(\frac{ddy}{dt\,dx}\right) = k\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Enſuite prenons auſſi les différentiels en ſuppoſant la ſeule t variable, & nous aurons $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = k\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$. Donc, puiſque $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) = \left(\frac{ddy}{dt\,dx}\right) = k\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, nous en tirerons $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = kk\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$,

&

& cette équation devant être la même avec la proposée, nous donne $kk = cc$, & partant ou $k = c$ ou $k = -c$.

XXVI. Donc toutes les fonctions de x & t, qui étant mises pour y satisfont à l'une ou à l'autre de ces deux équations,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = +c\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \& \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = -c\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

rempliront aussi en général les conditions renfermées dans notre équation, qui détermine le mouvement de la corde :

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

ou bien cette équation différentio-différentielle renferme les deux équations différentielles précedentes à la fois. Et partant nous sommes parvenus à résoudre cette égalité $\left(\frac{dy}{dt}\right) = k\left(\frac{dy}{dt}\right)$, ce qui se fera le plus promptement par la considération, qu'il est

$$dy = dt\left(\frac{dy}{dt}\right) + dx\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

d'où nous tirons à cause de $\left(\frac{dy}{dt}\right) = k\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$$dy = kdt\left(\frac{dy}{dx}\right) + dx\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ ou } dy = (dx + kdt)\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Il faut donc que $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ soit une fonction de la quantité $x + kt$, pour que la formule trouvée soit possible, & par conséquent l'intégration donnera pour y une fonction de $x + kt$.

XXVII. De là nous concluons réciproquement, que toute fonction de $x+kt$, étant mise pour y, satisfait à la condition exprimée par la formule $\left(\frac{dy}{dt}\right)=k\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Cela est aussi clair de soi-même; car marquant par $\Phi(x+kt)$ une fonction quelconque de la quantité $x+kt$, & son différentiel complet par $(dx+k\,dt)\,\Phi'(x+kt)$, où $\Phi'(x+kt)$ marquera une autre fonction finie de $x+kt$, qui dépend de la nature de la fonction $\Phi(x+kt)$; si nous posons $y=\Phi(x+kt)$, nous aurons $dy=(dx+kdt)\,\Phi'(x+kt)$ & partant suivant nôtre maniere d'exprimer

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=k\Phi'(x+kt) \quad \& \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)=\Phi'(x+kt)$$

d'où il est evident qu'il est $\left(\frac{dy}{dt}\right)=k\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Nous voilà donc arrivés à une construction générale de cette formule $\left(\frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dy}{dx}\right)$ qui nous donne en quantités finies pour y une fonction quelconque de la quantité $x+kt$.

XXVIII. Or puisque k est, ou $=+c$, ou $=-c$, à notre équation differentio-differentielle $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ posant $cc=\frac{2Fag}{M}$, satisfera également & toute fonction de la quantité $x+ct$, & toute fonction de la quantité $x-ct$. Prenant donc Φ & Ψ pour des marques des fonctions quelconques, & l'une & l'autre de ces deux valeurs:

$$y=\Phi(x+ct) \quad \& \quad y=\Psi(x-ct)$$

satisfera également à l'équation, qui contient le mouvement de la

corde:

corde: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, poſant $c = \sqrt{\frac{2Fag}{M}}$.
Donc à la même équation ſatisfera auſſi en général cette valeur compoſée : $y = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct)$.

XXIX. Pour éclaircir cela mieux, il faut remarquer que toute fonction, de quelque nature qu'elle ſoit, peut toûjours être repréſenter par une ligne courbe, dont l'appliquée exprime une certaine fonction de l'abſciſſe. Ayant donc conſtruit pour la fonction marquée par Φ une ligne courbe E S, & pour la fonction marquée par Ψ une autre ligne courbe F T, ſi nous prenons dans celle-là l'abſciſſe EQ $= x + ct$, & dans celle-cy l'abſciſſe FR $= x - ct$, les appliquées ſeront : Fig. 2.

$$QS = \Phi(x + ct) \quad \& \quad RT = \Psi(x - ct)$$

& la ſomme de ces deux appliquées, ou de leur multiple quelconque, nous fournira toûjours une valeur convenable pour y, qui ſatisfera à l'équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, & qui par conſequent ſera propre à nous repréſenter le mouvement véritable d'une corde, pourvu qu'elle ſoit conforme aux autres propriétés mentionnées au commencement.

XXX. Or, ſans faire encore attention à ces propriétés, & m'arrêtant uniquement à l'équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, il eſt important de remarquer, que les deux courbes ES & FT ſont abſolument arbitraires, & qu'on les peut prendre à volonté ; car, quelles que ſoient ces deux courbes, ſi nous y prenons les abſciſſes EQ $= x + ct$ & FR $= x + ct$, & que nous poſions $y =$ QS + RT, ou bien $y = n$(QS + RT), il eſt certain que cette valeur ſatisfait à notre

 équa-

équation ; ce qu'il feroit auſſi aiſé de prouver indépendamment de l'analyſe, que je viens de déveloper. Or, ce qui eſt le principal, ces deux courbes appliquées de la maniere enſeignée, ſatisfont également, ſoit qu'elles ſoient exprimibles par quelque équation, ou qu'elles ſoient tracées d'une maniere quelconque, de ſorte qu'elles ne puiſſent être aſſujetties à aucune équation. Le Lecteur eſt prié de réflêchir bien ſur cette circonſtance, qui contient le fondement de l'univerſalité de ma ſolution, conteſtée par M. d'*Alembert*.

XXXI. Mais voyons maintenant, de quelle condition doivent être ces deux courbes, ou la nature des deux fonctions Φ & Ψ, afin que les premieres propriétés de la corde ſoient maintenues. Or d'abord il faut, que poſant $x = o$, l'appliquée y evanouïſſe toûjours, de quelque durée que ſoit le tems t: ſoit donc $x = o$, & il faut qu'il ſoit :

$$\Phi(ct) + \Psi(-ct) = o \quad \text{ou} \quad \Psi(-ct) = -\Phi(ct)$$

d'où l'on voit que la fonction exprimée par Ψ eſt égale à celle qui eſt exprimée par Φ, & que prenant les abſciſſes négatitives, les appliqueés deviennent auſſi négatives en conſervant les mêmes valeurs. Les deux courbes ES & FT ſe réduiſent donc à une ſeule courbe, qui doit être telle, qu'aux abſciſſes négatives réponde une bramche ſemblable à celle qui répond aux abſciſſes poſitives ; mais qu'elle tombe de l'autre côté de l'axe. Si donc Φ marque une telle fonction, que j'ai nommée autrefois impaire, puiſqu'elle ne contient que des puiſſances impaires de la quantité, dont elle eſt fonction, notre équation ſera : $y = \Phi(x + ct) + \Phi(x - ct)$.

XXXII. L'autre condition exige, que poſant $x = a$, la valeur de y evanouïſſe également, quelque quantité que puiſſe avoir le tems t : il faut donc qu'il ſoit : $\Phi(a + ct) + \Phi(a - ct) = o$.

La courbe doit donc être telle, que ſi l'on prend l'abſciſſe $= a$, & & qu'on y ajoute, ou en retranche la même quantité quelconque, les appliquées, qui répondent à deux telles abſciſſes ſoyent égales, mais affec-

affectées de divers ſignes. Cette courbe aura donc non ſeulement autour du point, où eſt pris le commencement des abſciſſes, des branches alternativement ſemblables, mais auſſi autour du point, où ſe termine l'abſciſſe $= a$. De là il s'enſuit, comme j'ai fait voir, qu'elle doit avoir une infinité de tels points éloignés entr'eux du même intervalle $= a$, auprès desquels les branches de la courbe ſoyent de part & d'autre alternativement ſemblables.

XXXIII. Si l'on examine plus exactement les raiſons, ſur lesquelles je viens de fonder l'identité des fonctions Φ & Ψ, & qu'on faſſe ſurtout attention, que les deux courbes ne ſont aſſujetties à aucune loi, on s'appercevra aiſément, que l'égalité $\Psi(-ct) = -\Phi(ct)$ pourroit auſſi avoir lieu, ſans que les deux fonctions fuſſent égales. Mais il faut encore avoir égard à une autre circonſtance renfermée dans la propoſition du problème, qui exige abſolument cette égalité des deux fonctions. On ſuppoſé que la courbe commence ſon mouvement du repos; donc il faut que, poſant le tems $t = 0$, la viteſſe de chaque point de la corde, qui eſt exprimée par $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ evanouïſſe. Or ayant trouvé $y = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct)$, la différentiation fournit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = c\,\Phi'(x + ct) - c\,\Psi'(x - ct).$$

Poſons donc $t = 0$, & il faut qu'il ſoit $\Phi'(x) = \Psi'(x)$, d'où l'identité des fonctions Φ' & Ψ' & partant auſſi des fonctions Φ & Ψ s'enſuit ouvertement. Nous n'avons donc qu'une ſeule courbe, qui nous ſervira de régle pour déterminer le mouvement de la corde.

XXXIV. Cette courbe doit donc être telle, comme elle eſt préſentée dans la troiſième figure: ſi AB repréſente la longueur de la corde $= a$, la courbe ADB s'étendra de l'un & l'autre coté à l'infini, Fig. 3.
en ſorte que la portion AD′B′ ſoit égale & ſemblable à la courbe ADB, & de l'autre côté de même la branche B′D′A ſoit égale & ſem-

ſemblable à la branche BDA. Or la courbe ADB eſt abſolument arbitraire, comme j'ai déjà fait voir; & il n'importe ſi elle eſt réguliere, ou compriſe dans quelque équation, ou ſi elle eſt irréguliere, ou tracée d'une maniere quelconque. Ayant donc décrit une telle courbe ADB quelconque, qui paſſe par les points A & B, on n'a qu'à réïterer la deſcription de la même courbe à l'infini, tant vers la droite que vers la gauche, en la poſant alternativement au deſſus & au desſous de l'axe, de ſorte que partout les bouts ſemblables ſoient joints enſemble; ainſi en A on joigne la même courbe ADB par le bout A, & en B par le bout B, tout comme j'en ai enſeigné la conſtruction dans mon Mémoire ſur cette matiere.

XXXV. Ayant donc décrit une telle courbe quelconque, elle nous découvrira toujours un mouvement, dont la corde eſt ſuſceptible. Car poſant $t = 0$, nous en connoitrons d'abord la figure, que la corde doit avoir au commencement, pour que ce mouvement s'enſuive. Puiſque nous avons pour un tems quelconque t,

$$y = n\Phi(x + ct) + n\Phi(x - ct)$$

prenant pour n une fraction aſſés petite, afin que les appliquées dans la figure de la corde demeurent toujours quaſi infiniment petites, nous en tirerons pour la figure initiale de la corde cette équation :

$$y = n\Phi(x) + n\Phi(x) = 2n\Phi(x)$$

c'eſt à dire, prenant ſur notre courbe l'abſciſſe $AP = x$, l'appliquée PM priſe $2n$ fois nous donnera l'appliquée pour la figure initiale de la corde, qui convient à l'abſciſſe x. Donc, ſi les appliquées de la courbe AMB ſont aſſés petites, on pourra prendre $n = \frac{1}{2}$, & la figure arbitraire ADB elle-même repréſentera la figure initiale de la corde.

XXXVI. Réciproquement donc, dès qu'on connoit la figure initiale, qu'on aura donnée à la corde avant que de la relâcher, rien ne ſera plus aiſé que de décrire notre courbe infinie B′D′ADB′D &c. qui nous

nous fera connoitre le mouvement, que la corde pourſuivra. On tracera la courbe AMDB, égale & ſemblable à la figure initiale de la corde, & on en réïtérera la conſtruction, tant vers la gauche au delà du point A, que vers la droite au delà du point B, alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe, en ſorte que partout les bouts qu'on a joints enſemble ſoient les mêmes. Cette conſtruction a toujours lieu, de quelque nature que ſoit la figure initiale propoſée de la courbe, & il ne s'agit ici que de la portion ADB; laquelle quand elle-même auroit d'autres continuations de part & d'autre en vertu de ſa nature, elles n'entrent en aucune conſidération. Ainſi, ſi la figure ADB étoit un arc de cercle, ſans ſe ſoucier de la continuation naturelle du cercle, on répétera la deſcription de ce même arc de cercle ADB à l'infini alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe; & la même régle a toujours lieu, de quelque nature que puiſſe être la figure initiale de la corde.

XXXVII. Les différentes parties ſemblables de cette courbe ne ſont donc liées entr'elles par aucune loi de continuité, & ce n'eſt que par la deſcription, qu'elles ſont jointes enſemble. Par cette raiſon il eſt impoſſible, que toute cette courbe ſoit compriſe dans quelque équation, à moins que par hazard la figure ADB ne ſoit telle, que ſa continuation naturelle entraine toutes les autres parties réïtérées; & c'eſt le cas, où la figure ADB eſt la trochoïde Taylorienne, ou ſelon M. *Bernoulli* un mêlange de pluſieurs telles trochoïdes. C'eſt auſſi ſelon toute apparence la raiſon, pourquoi Mrs. *Bernoulli* & d'*Alembert* ont cru, que le problème n'étoit réſoluble que dans ces cas. Mais, de la maniere que je viens de conduire la ſolution, il n'eſt pas néceſſaire, que la courbe directrice ſoit exprimée par quelque équation, & la ſeule conſidération du trait de la courbe ſuffit à nous faire connoitre le mouvement de la corde, ſans l'aſſujettir au calcul. Je ferai auſſi voir, que ce mouvement n'eſt pas moins régulier, que ſi la figure initiale étoit une trochoïde, & par conſéquent la régularité du

 mou-

mouvement ne peut être alléguée en faveur des trochoïdes à l'exclusion de toutes les autres courbes, comme M. *Bernoulli* semble le soutenir.

XXXVIII. Or, pour déterminer par cette méthode le véritable mouvement de la corde, supposez que sa figure initiale aït été la courbe AMB (Fig. 4.), & il s'agit de déterminer la figure que la corde aura à chaque tems proposé de t secondes, depuis le commencement du mouvement. Pour cet effet qu'on décrive par la description réïtérée de cette même courbe AMB, la courbe directrice AMDB, (Fig. 3.) continuée de part & d'autre à l'infini, comme j'ai enseigné cy-dessus; & pour connoitre le mouvement du point M, qui se fait par hypothese dans la droite MP, qu'on prenne dans la directrice (Fig. 3.) de part & d'autre du point P les intervalles $PQ = PR = ct$, & ayant tiré les appliquées QS & RT, qu'on prenne Pm (Fig. 4.) égale à la semi-somme de ces appliquées, ou $Pm = \frac{1}{2}(QS + RT)$; & le point m sera le lieu, où le point de la corde M se trouvera après le tems t. De là il sera aisé de juger de la vitesse du point m, en comparant son lieu avec celui, où il se trouvera à l'instant suivant.

XXXIX. Si l'on prend le tems t de tant de secondes, qu'il devienne $ct = a$, alors il faut prendre de part & d'autre du point P les intervalles $PQ' = PR' = a = AB$; & il est évident qu'il y aura $BQ' = B'R' = AP$, & partant les appliquées $Q'S'$ & $R'T'$ égales entr'elles. Donc, après ce tems $t = \frac{a}{c}$ le point de la corde M se trouvera de l'autre côté de l'axe AB en N, de sorte que $PN = Q'S'$: d'où il est évident qu'après ce tems toute la corde aura la figure ANB égale à la figure $B'T'DA$, & partant aussi égale à la figure initiale AMB, mais dans une situation renversée, de sorte que la figure ANB soit semblable à la figure BMA. Puisque les tangentes en S' & T' sont également inclinées à l'axe, en reculant les points Q' & R' infiniment peu également, la somme des

des appliquées demeurera la même, & partant après le tems $\frac{a}{c} + dt$ le point M de la corde ſera encore en N: donc, lorsque la corde ſera parvenuë dans la ſituation ANB, elle n'aura plus de mouvement.

XL. Une vibration ayant donc commencé par l'état initial AMB, elle finira par l'état ANB, & partant le tems de cette vibration ſera $= \frac{a}{c}$ ſecondes, & il eſt évident que toutes les autres vibrations ſuivantes ſeront de la même durée. Pour mieux connoitre ce tems, on n'a qu'à ſe rappeller, que nous avons mis c pour la quantité $\sqrt{\frac{2Fag}{M}}$; donc le tems d'une vibration de la corde ſera $= \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ ſecondes; & cette expreſſion paroit plus propre à nous faire connoitre ce tems, que la longueur d'un pendule ſimple iſochrone. Il faut remarquer ici, que M marquant le poids de la corde, & F la force tendante auſſi expreſſible par un poids, ces deux quantités M & F ſont homogenes entr'elles, de même que les deux quantités a & g, dont celle-là marque la longueur de la corde, & celle-cy la hauteur, par laquelle un corps peſant tombe dans une ſeconde, qui eſt de $15\frac{5}{8}$ pieds de Rhin. De là on connoitra promptement le nombre de vibrations, que la corde rend dans une minute ſeconde, car ce nombre ſera $= \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$.

XLI. Il eſt certain qu'après le tems $t = \frac{a}{c}$ la corde parvienne dans la ſituation ANB; mais il pourroit bien arriver, qu'elle s'y fût trouvée déjà pendant ce tems une ou pluſieurs fois, & dans ces cas le tems d'une vibration ſe réduiroit à la moitié, ou au tiers, ou à quelqu'autre partie aliquote. Cela dépend de la figure initiale qu'on aura donnée à la corde, laquelle, lorsqu'elle n'a qu'un ventre, comme dans la quatrième figure, le tems d'une vibration ſera ſans aucun doute

Fig. 5. $= \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ secondes. Mais, si la figure initiale de la corde avoit deux ventres égaux AEC, CFB, comme dans la cinquième figure, & que la partie AEB fut égale & semblable à la figure BFC, on voit par notre construction, que le point C demeureroit toujours en repos, & que le mouvement de la corde seroit le même que celui d'une corde de la moitié de longueur, & d'une tension égale. Or il faut pour produire ces vibrations deux fois plus rapides, que le nœud de la figure initiale C se trouve précisément au milieu de la longueur, & que les deux ventres AEC, BFC, soyent égaux & semblables entr'eux: car sans cette condition le point C ne resteroit point immobile.

XLII. Ce que M. *Bernoulli* a remarqué sur le mêlange de deux ou plusieurs trochoïdes, est également applicable à toutes les autres courbes imaginables. Car, quelle que soit la figure initiale de la corde AMB fig. 4. elle peut servir d'axe à une autre figure semblable à la fig. 5: & celle-cy pourroit encore servir d'axe à d'autres figures semblables à plusieurs ventres. Dans ces cas le son total de la corde sera un mêlange de plusieurs sons, dont l'un seroit l'octave, les autres la douzième, la quinzième, la dix-septième, & ainsi de suite. Ce mêlange de sons rendus par une corde à la fois, que M. *Bernoulli* a le premier si heureusement expliqué, n'est donc pas un effet si essentiel de la combinaison des trochoïdes Tayloriennes, qu'il ne puisse également être produit par une semblable combinaison d'autres courbes quelconques. Et quand on fait réflexion à la maniere, dont on est accoutumé de frapper les cordes, il est très probable, qu'elles ne prennent jamais la figure des trochoïdes, ni qu'elles y approchent de plus en plus: puisque tous les phénomenes, que M. *Bernoulli* allégue, peuvent être également l'effet de toute autre figure quelconque.

XLIII. Il me semble que ces réflexions sont suffisantes à mettre ma solution à l'abri de toutes les objections, qui peuvent l'avoir renduë suspecte à M. *Bernoulli*, & surtout à M. d'*Alembert*. Celui-cy n'ayant allé-

allégué aucune raiſon, s'eſt contenté d'avertir les Lecteurs de mon Mémoire, qu'ils ne s'imaginaſſent pas, que ma ſolution étoit ſi générale que je l'avois donnée, & qu'elle ne s'étendoit pas à des figures quelconques, qu'on auroit données à la corde au commencement. Mais M. *Bernoulli* ſemble ſoutenir, que pour la production des vibrations iſochrones il faille abſolument que la force accélératrice ſoit toujours proportionelle à l'eſpace parcouru, jusqu'au lieu naturel. Selon ce ſentiment, ayant trouvé en général la force accélératrice $= -\frac{Fa}{M} \cdot \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, il faudroit la poſer proportionelle à la diſtance y, pour avoir une telle équation $-\frac{Fa}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{y}{c}$, dont l'intégrale, puisque la conſidération du tems n'y entre plus, ſeroit $y = n \sin x \sqrt{\frac{M}{Fac}}$, & pour que l'appliquée évanouïſſe auſſi en poſant $x = a$, il faudroit qu'il fut $\sqrt{\frac{M}{Fac}} = \frac{\lambda\pi}{a}$, marquant par λ un nombre entier quelconque. On auroit donc $c = \frac{Ma}{\lambda\lambda\pi\pi F}$, d'où réſultent en effet toutes les trochoïdes Tayloriennes.

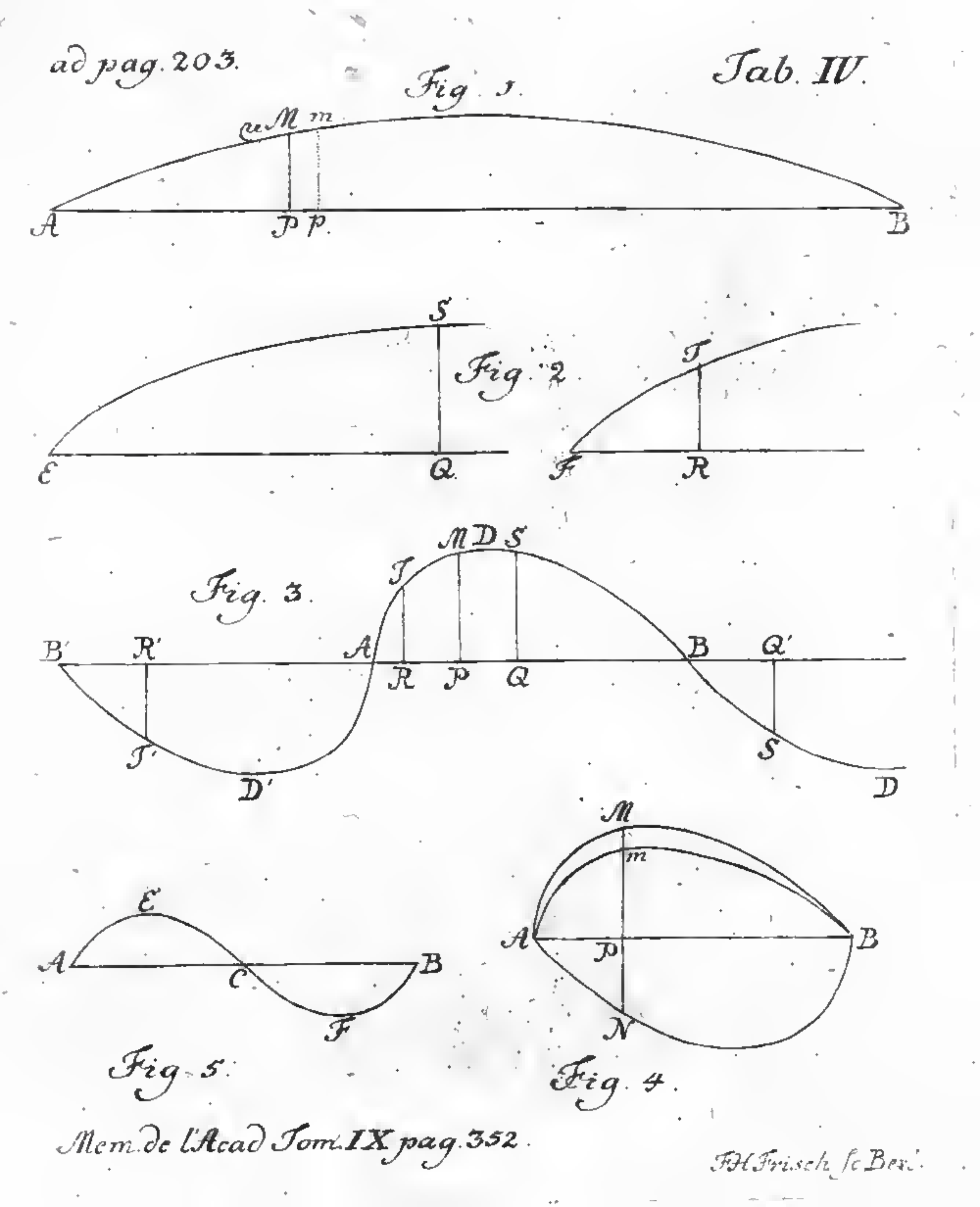
XLIV. Mais, outre que cette ſuppoſition ſeroit auſſi contraire à la combinaiſon de deux ou pluſieurs trochoïdes, que M. *Bernoulli* reconnoit pourtant dans le mouvement d'une corde, je remarque que cette hypotheſe eſt abſolument arbitraire, & qu'une infinité d'autres forces ſont auſſi propres à produire l'iſochroniſme dans le mouvement des cordes. Si la force accélératrice devoit uniquement dépendre de l'appliquée y, de ſorte qu'elle fut toujours la même à la même diſtance y, quelque grande qu'ait été l'excurſion de la corde, je conviens qu'il n'y en auroit pas d'autres propres à procurer l'iſochroniſme, que celle qui ſeroit proportionelle à la diſtance y. Mais, dès qu'on accorde, que cette force pourroit auſſi dépendre du plus grand éloignement, on ne ſauroit

 plus

plus disconvenir, qu'une infinité d'autres forces ne fut aussi propre à ce dessein. Or M. *Bernoulli* a fait voir lui-même, qu'il peut y avoir de l'isochronisme en des mouvemens, où la force sollicitante du corps, n'est pas simplement proportionelle à la distance; & les manieres qu'il rapporte, ne sont qu'un cas particulier de la méthode générale, dont j'envisage ici le mouvement des cordes.

XLV. Tout ce que je viens de dire, ne regarde que les cordes, qui sont de la même épaisseur par toute leur étenduë; & je conviens aisément, que si l'épaisseur de la corde étoit variable, il seroit impossible d'en déterminer le mouvement aussi généralement, que j'ai fait ici pour les cordes également épaisses. Mais ce n'est pas l'incommensurabilité des tems de diverses vibrations, dont la même corde est susceptible, qui arrête la solution, comme M. *Bernoulli* semble l'insinuer. C'est plutôt par une imperfection de l'analyse même, qu'il n'est pas possible de construire l'équation differentio-differentielle, qui renferme alors le mouvement. Car, comme pour les cordes d'une épaisseur uniforme j'ai trouvé cette équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, qui a admis une construction générale; ainsi les cordes d'une épaisseur variable conduisent à une telle équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = X\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, où X est une certaine fonction de x, qui dépend de l'épaisseur. Or, puisqu'il ne paroit pas, de quelle nature doit être la fonction y, pour qu'elle satisfasse à cette équation en général, c'est la cause véritable que la détermination du mouvement de ces cordes semble surpasser nos forces: cependant il n'est pas difficile de donner des solutions particulieres pour plusieurs cas, semblables à celles qui sont tirées des trochoïdes pour les cordes uniformement épaisses.

PRIN-


ad pag. 203.
Tab. IV.
Fig. 1
μ M m
A
P p.
B
S
Fig. 2
E
Q.
T
F
R
Fig. 3
M D S
T
A
B' R'
R P Q
B Q'
T'
D'
S
D
M
m
A
P
B
N
E
A
C
B
F
Fig. 5.
Fig. 4.
Mem. de l'Acad Tom. IX pag. 352
F.H. Frisch sc. Ber.